Труды Математического института АН СССР
1991, том 200

УДК 530.145.6

Ю. А. КУПЕРИН, Ю. Б. МЕЛЬНИКОВ, С. П. МЕРКУРЬЕВ

КВАНТОВОЕ РАССЕЯНИЕ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНЫХ НЕАБЕЛЕВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

1. Введение

В методе разделения переменных для дифференциальных операторов в частных производных осуществляется выбор представления (базиса) такого, что оно является собственным для некоторой части исследуемого оператора, допускающей обычно точное решение соответствующей спектральной задачи. Последующий переход в такое представление порождает редукцию (размерную) исходной задачи к некоторой новой задаче, которая иногда одномерна, а в редких случаях и точно решаема. Например, для квантовых гамильтонианов H, представимых в виде суммы $H = H_k + H_{\mathrm{int}}$ кинетического члена H_k и взаимодействия H_{int}, этот метод сводится к выбору базиса представления, собственного для H_k. Если оператор H_{int} не диагонален в таком представлении, то возникающая редуцированная задача по трудности не сильно отличается от исходной, а сам метод оказывается по существу не эффективным. В приведенном примере причина неэффективности метода очевидна: при построении базиса представления не используется (хотя бы частично) информация, содержащаяся в H_{int}.

Эта информация может быть учтена при переходе в традиционное адиабатическое представление [1—3]. Смысл такого перехода состоит в ренормировке полного гамильтониана $H_k + H_{\mathrm{int}} \to H_q + H_s$ с его новым разбиением на операторы H_q, H_s, описывающие динамику быстрой и медленной подсистем с последующим переходом в спектральное представление «быстрого» гамильтониана H_q. Результатом такой процедуры, в простейшем случае отсутствия у оператора H_q непрерывного спектра, является адиабатический гамильтониан $H_A = H_s \otimes I + V_{\mathrm{int}}$, задающий «медленную» многоканальную динамику. Связь каналов осуществляется матричным оператором V_{int}.

На основе группы G симметрии гамильтониана H_A обычно строится иерархия эффективных взаимодействий V_{int}, в которой переход к более сильному взаимодействию сопровождается расширением G, а ослабление взаимодействия связано с нарушением симметрии и сужением G. В частности, сужение $V_{\mathrm{int}} \to V_{\mathrm{int}}^N$ оператора связи каналов на N-мерное подпространство, отвечающее, например, N низшим уровням гамильтониана H_q, или переход к адиабатическому пределу $V_{\mathrm{int}} \to \mathrm{diag}\,\{v_n\}$, что соответствует сужению $G \to \otimes\, U(1)$, являются вариантами теории возмущений.

Однако традиционная редукция оператора V_{int} до V_{int}^N или $\mathrm{diag}\,\{v_n\}$ [1, 2] с последующим применением теории возмущений дает удовлетворительное описание спектральных характеристик исходного гамильтониана H лишь для достаточно узкого класса систем. В то же время, при отказе от использования теории возмущений в рамках описанного «классического» варианта метода адиабатических представлений, утрачивается хорошо развитая техника исследования динамики системы в терминах V_{int}. Это обусловлено, в частности, тем, что для операторов V_{int} общего вида изучение связей между V_{int} и спектральными свойствами оператора H представляет собой весьма трудную задачу.

Описанный выше подход маскирует нетривиальные геометрические аспекты адиабатических представлений. В последнее время, однако, предпринимались попытки [4—12] трактовать адиабатические разложения в квантовомеханических задачах с точки зрения геометрических структур, определяемых процессами, происходящими в системе. В такой интерпретации топологические инварианты (фаза Берри, классы Черна и т. п.), а также связности, порождающие удлинение производных в эффективных гамильтонианах, не относятся непосредственно к традиционным выделениям быстрой и медленной подсистем, а определяются геометрией, согласованной со структурой спектра изучаемых гамильтонианов. Именно, конфигурационное пространство системы наделяется структурой многообразия, порожденной подходящим выбором координат. Это многообразие рассматривается как расслоенное пространство с базой, фиксируемой выделением тех или иных степеней свободы системы. Спектральная задача для оператора Шредингера в слое порождает соответствующее гильбертово расслоение, геометрическая структура которого характеризуется как свойствами базы, так и спектром гамильтониана. При этом проблема восстановления геометрии в целом сводится в конечном счете к построению равномерных асимптотик решений уравнения Шредингера. Асимптотическая информация о таких решениях служит инструментом исследования геометрии расслоенного пространства и при заданной калибровочной группе позволяет построить правильные эффективные динамические уравнения и изучить их свойства.

Таким образом, целью геометрического подхода к адиабатическим представлениям обычно является отыскание такого пространства, в котором возникающие в эффективных динамических уравнениях поля превратились бы в стандартные геометрические объекты. Это позволяет применить мощные и хорошо разработанные методы геометрии, алгебры и топологии для изучения свойств решений динамических уравнений. Найденное пространство рассматривается как формально-математическое конфигурационное пространство.

В настоящей работе развит геометрический подход к методу адиабатических представлений для некоторого класса нерелятивистских гамильтонианов и на этой основе исследованы соответствующие динамические уравнения с эффективными неабелевыми взаимодействиями, имеющими смысл калибровочных полей, индуцированных размерной редукцией в специальном представлении. В рамках предложенного подхода получена двухсторонняя связь полной и эффективной S-матриц для процессов рассеяния $2 \to (2, 3)$ в системе трех тел.

2. Эффективные неабелевы взаимодействия

В настоящем разделе мы предлагаем способ получения эффективных неабелевых взаимодействий в задачах квантовой механики, основанный на адиабатических представлениях нерелятивистских гамильтонианов специальной структуры. Пусть $\mathcal{M}$ — гладкое многообразие без края размерности n. Пусть для $\forall \xi \in \mathcal{M}$ существует однозначное соответствие $\xi \mapsto \mathcal{F}_\xi$, где $\mathcal{F}_\xi$ — гильбертово пространство. В силу этого соответствия будем называть $\mathcal{F}_\xi$ гильбертовым слоем. Линейное множество $\hat{\mathfrak{H}} = \{f\colon \xi \mapsto f(\xi) \in \mathcal{F}_\xi\}$ функций на $\mathcal{M}$ со значениями в $\mathcal{F}_\xi$, наделенное структурой нормированного пространства, например,

$$\|f\|_{\hat{\mathfrak{H}}} = \operatorname*{ess\,sup}_{\xi \in \mathcal{M}} \|f(\xi)\|_{\mathcal{F}_\xi}, \tag{1}$$

разложимо в прямой интеграл гильбертовых слоев $\mathcal{F}_\xi$ по лебеговой мере на $\mathcal{M}$:

$$\hat{\mathfrak{H}} = \int_{\mathcal{M}} \oplus \mathcal{F}_\xi d\xi. \tag{2}$$

Линейный оператор $L\colon f \mapsto Lf$ в $\hat{\mathfrak{H}}$ разложим в прямой интеграл

$$L = \int_{\mathcal{M}} \oplus L(\xi)\, d\xi, \tag{3}$$

если для $\forall f \in \mathcal{D}(L) \subset \hat{\mathfrak{H}}$ из области определения L и для $\forall \xi \in \mathcal{M}$ выполнено условие строгой локальности

$$(Lf)(\xi) = L(\xi) f(\xi).$$

Операторы $L(\xi)$, действующие в гильбертовых слоях $\mathcal{F}_\xi$, будем называть слоями оператора L.

Будем рассматривать заданные в $\hat{\mathfrak{H}}$ гамильтонианы H специальной структуры:

$$H = h \otimes I + L. \tag{4}$$

Здесь, в соответствие с (1), $h \otimes I$ действует как оператор h в $L^\infty(\mathcal{M})$, а L представим в виде (3).

Всюду ниже слои $L(\xi)$ оператора L будем считать самосопряженными на сечениях $\mathcal{D}(L(\xi))$ области определения $\mathcal{D}(L)$ оператора L, что наделяет набор собственных функций $\{\varphi_a(\xi)\}$:

$$L(\xi)\, \varphi_a(\xi) = \varepsilon_a(\xi)\, \varphi_a(\xi) \tag{5}$$

операторов $L(\xi)$ свойствами ортонормированного базиса в $\mathcal{F}_\xi$, параметрически зависящего от точки $\xi \in \mathcal{M}$ ($\equiv$ репера). Следовательно, разложения

$$\psi = \sum_a \int \overline{\chi_\alpha(\xi)}\, \varphi_\alpha(\xi), \tag{6}$$

$$\psi \in \hat{\mathfrak{H}},$$

где

$$\chi_a(\xi) = \langle \varphi_a, \psi \rangle_{\mathcal{F}_\xi}, \qquad \chi_a(\xi) \in \mathbf{C},$$

сходятся по норме в $\hat{\mathfrak{H}}$. Представление $\psi \mapsto \chi \equiv \{\chi_a\}$ будем называть адиабатическим в $\hat{\mathfrak{H}}$.

Следующим этапом является изучение спектральной задачи

$$H\psi = E\psi \tag{7}$$

для гамильтониана H вида (4) с тензорной составляющей $h \otimes I$ специальной структуры:

$$h = -\Delta_\xi + V(\xi),$$

где Δ_ξ — оператор Лапласа на многообразии $\mathcal{M}$, понимаемый в стандартном смысле [13], а $V(\cdot)$ — операторнозначная функция на $\mathcal{M}$ со значениями в пространстве ограниченных линейных операторов над $\mathcal{F}_\xi$. В представлении $\psi \mapsto \chi$ задача (7) может быть записана в виде эффективного динамического уравнения относительно коэффициентов разложения (6):

$$\{-(\nabla_\xi \otimes I + A(\xi))^2 + \Lambda(\xi)\}\, \chi = E\chi. \tag{8}$$

При переходе от уравнения (7) к эффективному уравнению (8) использовано тождество

$$\langle\varphi_a,\ \Delta_\xi\varphi_b\rangle_{\mathcal{F}_\xi} = (\nabla_\xi A + A^2)_{ab},$$

в котором «матричные элементы» A_{ab} оператора A определяются формулой

$$A_{ab}(\xi) = \langle\varphi_a,\ \nabla_\xi\varphi_b\rangle_{\mathcal{F}_\xi}. \tag{9}$$

В (8) $\Lambda(\xi) = \mathrm{diag}\,\{\varepsilon_a(\xi)\}$.

В работе [11] показано, что оператор A имеет смысл обобщенной аффинной дифференциально-геометрической связности, которая определяется как линейная операция «ковариантного» дифференцирования функций $f(\xi) \in \mathcal{F}_\xi$ в некоторой карте $\Omega \subset \mathcal{M}$ с локальными координатами $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, задаваемая формулой [14]

$$(D_\mu\eta)_a = \partial_\mu\eta_a + \sum_b \int A^\mu_{ab}(\xi)\,\eta_b(\xi), \qquad \mu = 1, \ldots n.$$

Здесь $\eta(\xi) = \{\eta_i\}$ — произвольный базис в слое $\mathcal{F}_\xi$ и приняты обозначения $\partial_\mu \equiv \partial/\partial\xi^\mu$, $A^\mu_{ab} = \langle\varphi_a,\ \partial_\mu,\ \varphi_b\rangle$. При унитарном преобразовании базиса $\eta = U\eta^1$ операторы A^μ преобразуются по формуле

$$A'^\mu = U^{-1}A^\mu U(\xi) + U^{-1}\partial_\mu U(\xi).$$

Последнее означает, что оператор $A(\xi)$, рассматриваемый как операторнозначное векторное поле $A(\xi) = \{A^\mu(\xi)\}$, $\mu = 1, \ldots, n$, на $\mathcal{M}$, преобразуется калибровочным образом.

По заданной связности A стандартным образом [14] определим кривизну R как коммутатор ковариантных производных $D_\mu = \partial_\mu \otimes I + A^\mu(\xi)$:

$$R_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu + [A^\mu, A^\nu].$$

Для гладких реперов $\{\varphi_a(\xi)\} \in C^2(\mathcal{M})$ из условия Фробениуса следует, что $\hat{R} \equiv 0$.

Векторы χ могут быть интерпретированы как волновые функции квазичастиц, порожденных размерной редукцией, и взаимодействующих с неабелевым калибровочным полем A.

При движении точки ξ по базе $\mathcal{M}$ репер $\{\varphi_a\}$ преобразуется под действием оператора эволюции $U(\xi, \xi_0)$:

$$U(\xi, \xi_0)\colon\ \varphi(\xi_0) \mapsto \varphi(\xi), \qquad \xi, \xi_0 \in \mathcal{M},$$

связанного с калибровочным полем A соотношением [11]

$$A^\mu(\xi) = -\partial_\mu U(\xi, \xi_0)\, U^{-1}(\xi, \xi_0) \tag{10}$$

для любой фиксированной точки $\xi_0 \in \mathcal{M}$.

Если интеграл от 1-формы связности $\hat{A}(\xi) = \sum\limits_\mu A^\mu d\xi^\mu$ не зависит от контура интегрирования $C \subset \mathcal{M}$, соединяющего точки ξ_0 и ξ, то, пользуясь соотношением $U(\xi_0, \xi_0) = I$, из (10) имеем представление оператора эволюции репера в виде мультипликативного интеграла

$$U(\xi, \xi_0) = P\text{-}\exp\{-\int_T \hat{A}(\xi)\}. \tag{11}$$

Интеграл в показателе P-экспоненты (11) является операторным обобщением фазы Берри [4] и определяет эволюцию подсистемы, задаваемой подгамильтонианом $L(\xi)$, при движении параметра ξ по контуру $C \subset \mathcal{M}$.

Построенные выше операторы связности $A(\xi)$ и эволюции репера $U(\xi, \xi_0)$

ассоциированы со спектральным разложением гильбертовых слоев $\mathscr{F}_\xi$ на собственные подпространства слоев $L(\xi)$ оператора L. Спектральное проецирование позволяет выделить нетривиальную кривизну порожденную соответствующей связностью, и записать обобщенное условие адиабатичности системы в форме уравнения нулевой кривизны. Для этого следует переписать уравнение (8) в терминах определенных ниже энергозависящих эффективных взаимодействий.

Именно, рассмотрим гамильтониан H в подпространстве $P_0\hat{\mathfrak{H}}$, где проектор P_0 для фиксированной энергии E_0 определяется следующим образом. Рассмотрим функцию

$$a_0(\xi) = \max_a \{a\colon \varepsilon_a(\xi) \leqslant E_0\}$$

и обозначим через $P_0(\xi)$ проектор в слое $\mathscr{F}_\xi$:

$$P_0(\xi) = \sum_{a \leqslant a_0(\xi)}\!\!\!\!\!\!\int \langle\varphi_a, \cdot\rangle_{\mathscr{F}_\xi}\varphi_a.$$

Тогда по определению

$$P_0 = \int_{\mathscr{M}} \oplus P_0(\xi)\,d\xi, \qquad Q_0 = I_{\hat{\mathfrak{H}}} - P_0.$$

Справедливо соотношение [11]

$$\langle\varphi_a, \Delta_\xi\varphi_b\rangle_{\mathscr{F}_\xi} = \nabla_\xi(A_P)_{ab} + (A_Q^2)_{ab} - (A_P^2)_{ab}, \tag{12}$$

где матричные элементы $(A_P)_{ab} = \langle\varphi_a, \Delta_\xi\varphi_b\rangle$, $(A_Q^2)_{ab} = \langle Q_0\Delta_\xi\varphi_a, \Delta_\xi\varphi_b\rangle$ определены при $a, b \leqslant a_0$. Действуя на уравнение Шредингера (7) проекторами P_0, Q_0, исключая переменную $Q_0\psi$ и используя адиабатическое разложение (6) в подпространстве $P_0\hat{\mathfrak{H}}$, с учетом (12) имеем

$$\{-(\nabla_\xi + A_P)^2 + \Lambda_P + A_Q^2 + W(E)\}\,\chi_P = E\chi_P, \tag{13}$$

где $\Lambda_P = \operatorname{diag}\{\varepsilon_a(\xi)\}_{a\leqslant a_0}$, $\chi_P = \{\chi_a\}_{a\leqslant a_0}$, а через $W(E)$ обозначен зависящий от спектрального параметра E оператор с матричными элементами

$$W_{ab}(E)\colon\ \eta(\xi) \mapsto -\langle HQ_0(Q_0HQ_0 - E)^{-1}Q_0H(\eta\varphi_b), \varphi_a\rangle. \tag{14}$$

Вычислим соответствующую аффинной связности $A_P(\xi)$ форму кривизны

$$\begin{gathered}\hat{R}_P = \sum_{\mu<\nu}(R_P)_{\mu\nu}d\xi^\mu \wedge d\xi^\nu,\\ (R_P)_{\mu\nu} = \partial_\mu A_P^\nu - \partial_\nu A_P^\mu + [A_P^\mu, A_P^\nu].\end{gathered} \tag{15}$$

и в ее терминах опишем адиабатические свойства системы. В предположении изоморфности гильбертовых слоев $\mathscr{F}_\xi \simeq \mathscr{F}$, будем называть подпространство $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}$ адиабатическим подпространством для семейства реперных операторов $L(\xi)$ в области $\mathscr{M}_0 \subset \mathscr{M}$, если для любой функции репера $\varphi_a(\xi_0) \in \mathscr{F}_0$, лежащей в $\mathscr{F}_0$ при некотором $\xi \in \mathscr{M}_0$, $\varphi_a(\xi) \in \mathscr{F}_0$ для всех $\xi \in \mathscr{M}_0$.

Из полноты репера $\{\varphi_a\}$ в гильбертовом слое $\mathscr{F}_\xi$ следует, что если $\varphi(\xi) \in C^2(\mathscr{M}_0)$ и подпространство $\mathscr{F}_0 = \mathscr{L}\{\varphi_a\}_{a\leqslant a_0}$ является адиабатическим для семейства реперных операторов $L(\xi)$ в области $\mathscr{M}_0 \subset \mathscr{M}$, то соответствующая форма кривизны тождественно обращается в нуль на $\mathscr{M}_0$: $\hat{R}_P|_{\mathscr{M}_0} \equiv 0$. Последнее равенство можно интерпретировать как необходимое условие адиабатичности системы и записать в виде нелинейного уравнения относительно оператора A_P:

$$d\hat{A}_P = {}^1/_2\,[\hat{A}_P, \hat{A}_P]. \tag{16}$$

Смысл этого уравнения вполне стандартен [15].

3. Связь S-матриц в задаче трех тел

Описанный в предыдущем разделе подход может быть, в частности, использован для анализа задачи рассеяния в квантовой системе трех тел. В рассматриваемом случае конфигурационное пространство M системы в терминах координат Якоби [16] $\{x_\alpha, y_\alpha\}$ представимо в виде прямого произведения $M = \mathbf{R}^3_{x_\alpha} \times \mathbf{R}^3_{y_\alpha}$, а в качестве базового многообразия может быть, например, выбрано $\mathcal{M} = \mathbf{R}^3_{y_\alpha}$.

Гамильтониан H системы трех тел, понимаемый как максимальное самосопряженное расширение в $\mathfrak{H} = L^2(M)$ заданного на $C^2(M) \subset \mathfrak{H}$ оператора $H = -\Delta_X + \sum_{\alpha=1}^{3} v_\alpha$, представим в виде

$$H = -\Delta_{y_\alpha} \otimes I_{x_\alpha} + \int_{\mathcal{M}} \oplus\, L(y_\alpha)\, dy_\alpha, \tag{17}$$

где

$$L(y_\alpha) = -\Delta_{x_\alpha} + \sum_\beta v_\beta(x_\beta). \tag{18}$$

Будем рассматривать H в пространстве

$$\hat{\mathfrak{H}} = \int_{\mathcal{M}} \oplus\, L^2(\mathbf{R}^3_{x_\alpha})\, dy_\alpha. \tag{19}$$

Такая модификация задачи является оправданной, так как собственные функции дискретного спектра и волновые функции непрерывного спектра, отвечающие процессам рассеяния $2 \to (2, 3)$, для достаточно гладких потенциалов v_β лежат в пространстве $\hat{\mathfrak{H}}$. Доказательство этого факта основано на том, что соответствующие волновые функции являются квадратично-интегрируемыми по любому сечению $\mathbf{R}^3_{x_\alpha}$ пространства M.

Для убывающих на бесконечности потенциалов непрерывный спектр операторов $L(y_\alpha)$ совпадает с полуосью $[0, \infty)$ для всех $y_\alpha \in \mathbf{R}^3$ и параметризуется вектором $q \in \mathbf{R}^3$, а дискретный спектр состоит из термов $\varepsilon_n(y_\alpha)$:

$$L(y_\alpha)\,\varphi_n(x_\alpha, y_\alpha) = \varepsilon_n(y_\alpha)\,\varphi_n(x_\alpha, y_\alpha), \tag{20}$$
$$L(y_\alpha)\,\varphi_q(x_\alpha, y_\alpha) = q^2\varphi_q(x_\alpha, y_\alpha).$$

В рассматриваемом случае эффективное уравнение (8) приобретает вид

$$\{-(\nabla_{y_\alpha} \otimes I + A(y_\alpha))^2 + \Lambda(y_\alpha)\}\,\chi = E\chi \tag{21}$$

и содержит калибровочное поле (неабелево взаимодействие) $A(y_\alpha)$:

$$A_{ab}(y_\alpha) = \langle \varphi_a, \nabla_{y_\alpha} \varphi_b \rangle_{L_2(\mathbf{R}^3_{x_\alpha})}. \tag{22}$$

Вектор $\chi(y_\alpha)$ имеет компоненты

$$\chi_a(y_\alpha) = \langle \varphi_a, \psi \rangle_{L_2(\mathbf{R}^3_{x_\alpha})}. \tag{23}$$

Под ψ здесь понимаются волновые функции непрерывного спектра оператора H, отвечающие процессам рассеяния $2 \to (2, 3)$ [16].

Эффективное уравнение (21) задано на некомпактном многообразии $\mathcal{M} = \mathbf{R}^3_{y_\alpha}$, и поэтому для однозначной разрешимости его следует дополнить асимптотическими граничными условиями на бесконечности $|y_\alpha| \to \infty$. Постановка таких граничных условий может быть проведена по следующей схеме. Асимптотики трехтельной волновой функции $\Psi(x_\alpha, y_\alpha)$ известны [16]. Следует вычислить асимптотики реперных функций $\varphi_a(x_\alpha, y_\alpha)$ при $|y_\alpha| \to \infty$, а затем, с помощью (23), найти асимптотики $\chi_a(y_\alpha)$.

Для потенциалов $v_\beta(x_\beta)$, квадратично-суммируемых и непрерывных при больших $|x_\beta|$, имеет место асимптотическое при $|y_\alpha| \to \infty$ разбиение собственных функций $\varphi_n(x_\alpha, y_\alpha)$ дискретного спектра операторов $L(y_\alpha)$ на серии, отвечающие связанным состояниям в парных подсистемах с ренормированными потенциалами $c_{\beta\alpha}^{-2} v_\beta(x_\beta)$. Здесь $c_{\beta\alpha}$ — элемент унитарного оператора пересчета Якобиевых базисов [16]. Выделенная серийная структура реперных функций позволяет провести асимптотический анализ и получить следующие асимптотики для дискретных χ_n и непрерывных χ_q компонент вектора $\chi(y_\alpha)$:

$$\chi_n(y_\alpha) = \delta_{nj_0} e^{-i(p_\alpha, y_\alpha)} + \mathcal{A}^{(n)}_{\alpha, n}(\hat{y}_\alpha, p_\alpha) \exp\{-i\sqrt{E + \varkappa_A^2}\,|y_\alpha|\}\,|y_\alpha|^{-1} +$$
$$+ \sum_{B \neq A} \mathcal{A}_B^{(n)}(\hat{y}_\alpha, p_\alpha) \exp\{-i\sqrt{E + \varkappa_B^2}\,|y_\alpha|/|c_{\beta\alpha}|\}\,|y_\alpha|^{-1} + O(|y_\alpha|^{-2}), \tag{24}$$

$$\chi_q(y_\alpha) = \mathcal{A}_0^q(\hat{y}_\alpha, p_\alpha) \exp\{-i\sqrt{E - q^2}\,|y_\alpha|\}\,|y_\alpha|^{-1} +$$
$$+ \sum_{B \neq A} (\mathcal{A}_B^q(\hat{y}_\alpha, p_\alpha) + \mathcal{A}_B'^q(\hat{y}_\alpha, p_\alpha) \exp\{-i(q, y_\alpha) s_{\beta\alpha}/c_{\beta\alpha}\}) \times$$
$$\times \exp\{-i\sqrt{E + \varkappa_B^2}\,|y_\alpha|/|c_{\beta\alpha}|\}\,|y_\alpha|^{-1} + O(|y_\alpha|^{-2}). \tag{25}$$

Здесь p_α — импульс, канонически сопряженный координате y_α, $-\varkappa_B^2$ — энергия связи связанного состояния в парной подсистеме β с квантовыми числами $B = \{\beta, j\}$. Начальное состояние системы характеризуется связанным состоянием $A_0 = \{\alpha, j_0\}$ в паре α и относительным импульсом p_α. При этом эффективные амплитуды $\mathcal{A}^{(n)}_{\alpha, j}$, $\mathcal{A}_B^{(n)}$, $\mathcal{A}_0^q$, $\mathcal{A}_B^q$, $\mathcal{A}_B'^q$ могут быть выражены в терминах трехтельных амплитуд $F_B(\hat{y}_\beta, p_\alpha)$, $F_0(\hat{X}, p_\alpha)$, отвечающих процессам $2 \to 2$ и $2 \to 3$ соответственно.

Более содержательным является, однако, обратное представление, позволяющее определить отвечающие процессам $2 \to (2, 3)$ компоненты трехтельной S-матрицы в терминах эффективных амплитуд $\mathcal{A}$. Такое представление может быть получено разложением компонент трехтельной волновой функции Ψ по реперу $\{\varphi_a\}$ с последующим сравнением коэффициентов асимптотик. Это дает

$$\hat{S}_{AA_0}(\hat{y}_\alpha, p_\alpha, E) = \delta_{jj_0}\delta(\hat{y}_\alpha - \hat{p}_\alpha) + 2i(2\pi)^{-5/2}\rho_{A_0}(E) \times$$
$$\times \rho_A(E)\,\overline{\mathcal{A}^{(j)}_{\alpha, j}(\hat{y}_\alpha, p_\alpha)}, \qquad A = \{\alpha, j\}, \qquad A_0 = \{\alpha, j_0\}, \tag{26}$$

для каналов упругого и неупругого рассеяния;

$$\hat{S}_{BA_0}(\hat{y}_\beta, p_\alpha, E) = 2i(2\pi)^{-5/2}\rho_{A_0}(E)\rho_B(E)\,|c_{\beta\alpha}|^{-1} \times$$
$$\times \int dx_\beta \psi_\beta(x_\beta) \exp\{-i\sqrt{E + \varkappa_B^2}(x_\beta, \hat{y}_\alpha) s_{\beta\alpha}\} \Big(\sum_{B \neq A} \overline{\mathcal{A}_B^{(n)}(\hat{y}_\beta, p_\alpha)}\, \psi_n^{(\alpha\beta)}(x_\beta) +$$
$$+ \int dq\, (\overline{\mathcal{A}_B'^q(\hat{y}_\beta, p_\alpha)} \exp\{i(q, x_\beta)/c_{\beta\alpha}\} + \overline{\mathcal{A}_B^q(\hat{y}_\beta, p_\alpha)}\, Q^q_{\beta, as}(x_\beta, \hat{y}_\beta))\Big), \qquad B \neq A, \tag{27}$$

для каналов перестройки;

$$\hat{S}_{0A_0}(\hat{X}, p_\alpha, E) = 2(2\pi)^{-2}\rho_{A_0}(E)\rho_0(E)\,e^{-i\pi/4}\,(\overline{\mathcal{A}_0^{\tilde{q}}(\hat{y}_\alpha, p_\alpha)} +$$
$$+ 2\pi\zeta_\alpha \int_{S^2} \overline{\mathcal{A}_0^{q'}(\hat{y}_\alpha, p_\alpha)}\, f_\alpha^{as, q'}(\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha)\, d\hat{q}), \qquad \zeta_\alpha = \tau_\alpha(1 + \tau_\alpha^2)^{-1/2}, \qquad \tau_\alpha = |x_\alpha|/|y_\alpha|,$$
$$\tilde{q} = \zeta_\alpha \hat{x}_\alpha, \tag{28}$$
$$q' = \varphi_\alpha \hat{q}, \qquad \hat{x}_\alpha = x_\alpha/|x_\alpha|, \qquad \hat{y}_\alpha = y_\alpha/|y_\alpha|, \qquad \hat{q} = q/|q|,$$

для канала трехчастичного развала. Здесь $\psi_B(x_\beta)$ — собственные функции связанных состояний с квантовыми числами $B = \{\beta, j\}$, и использованы обозначения:

$$\psi_n^{(\alpha\beta)} = \lim_{|y_\alpha|\to\infty} \varphi_n(x_\alpha, y_\alpha), \qquad |x_\beta| < (1 + |y_\beta|)^{1/3},$$

$$Q^q_{\beta,as} = \lim_{|y_\alpha|\to\infty} (\Delta_{x_\alpha} + q^2 + i0)^{-1} v_\beta \varphi_q(x_\alpha, y_\alpha),$$

$$f_\alpha^{as,q} = \lim_{|y_\alpha|\to\infty} \exp\{-i|q||x_\alpha\}|x_\alpha| \lim_{|x_\alpha|\to\infty} (\Delta_{x_\alpha} + q^2 + i0)^{-1} v_\alpha \varphi_q,$$

$$\rho_B(E) = \sqrt{(E + \varkappa_B^2)/2}, \qquad \rho_0(E) = \sqrt{E/2}.$$

Соотношения (26)—(28) позволяют однозначно восстановить элементы полной (трехтельной) S-матрицы, отвечающие процессам рассеяния $2 \to (2, 3)$ в терминах эффективных амплитуд $\mathcal{A}$. Последние носят двухчастичный характер, а их свойства определяются эффективным неабелевым взаимодействием, порожденным переходом в адиабатическое представление $\Psi \mapsto \chi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Born M., Oppenheimer R.* Zur Quantentheorie der Molekulen // Ann. Phys. 1927. Bd. 84. S. 457—484.
2. *Виницкий С. И., Пономарев Л. И.* Адиабатическое представление в задаче трех тел с кулоновским взаимодействием // ЭЧАЯ. 1982. Т. 13. С. 1336—1418.
3. *Браун П. А., Киселев А. А.* Введение в теорию молекулярных спектров. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.
4. *Moody J., Shapere A., Wilczek F.* Realization of magnetic-monopole Gauge fields: Diatoms and spin precision // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 2597—2599.
5. *Wilezek F., Zee A.* Appearance of Gauge structure in simple dynamical systems // Ibid. 1984. Vol. 52. P. 2111—2114.
6. *Zygelmann B.* Appearance of Gauge potentials in atomic collision physics // Phys. Lett. A. 1987. Vol. 125. P. 476—481.
7. *Iwai T.* A Gauge theory for the quantum planar three-body problems // J. Math. Phys. 1987. Vol. 28. P. 964—974.
8. *Kuperin Yu. A., Melnikov Yu. B., Pavlov B. S.* Quantum scattering problem in triangle representation and induced Gauge fields // Topological phases in quantum theory / Ed. B. Markovski, S. I. Vinitsky. Singapore: World Sci., 1988. P. 146—172.
9. *Jackiw R.* Three elaborations on Berry's sonnection, curvature and phase // Intern. J. Mod. Phys. A. 1988. Vol. 3, N 2. P. 285—297.
10. *Куперин Ю. А., Макаров К. А.* Адиабатическое представление уравнений Фаддеева // Вестн. ЛГУ. Сер. 4. 1989. Вып. 2. № 11. С. 71—74.
11. *Kuperin Yu. A., Kurasov P. B., Melnikov Yu. B., Merkuriev S. P.* Connexions and effective S-matrix in triangle representation for quantum seattering: Prepr. INFN-ISS 89/6. Roma, 1989.
12. *Herdegen A.* Geometric structure of quantum-mechanical evolution // Phys. Lett. A. 1989. Vol. 139. P. 109—111.
13. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1984. Т. 2.
14. *Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука, 1987.
15. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
16. *Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д.* Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.